

TD Groupe symétrique

Groupes

QVN Exercice 1 Montrer que le groupe $(\mathbb{Q}, +)$ n'admet pas de partie génératrice finie.

FDS Exercice 2 ✎

1. Montrer que $(\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Q}, +)$ ne sont pas isomorphes.
2. ★ Montrer que $(\mathbb{Q}, +)$ et (\mathbb{Q}^*, \times) ne sont pas isomorphes.

J5Q Exercice 3 Soit $a: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une isométrie affine qui préserve l'ensemble \mathcal{P}_n des n points d'affixes dans \mathbb{U}_n .

On note r la rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et s la symétrie par rapport à l'axe (Ox) . L'objectif est de montrer que a peut s'écrire $s \circ r^k$.

1. Montrer que a est linéaire, c'est-à-dire que $a(\vec{0}) = \vec{0}$. **Ind.** : Une transformation affine préserve les barycentres (les moyennes).
2. À partir de a , construire une transformation a' préservant \mathcal{P}_n et fixant le point d'affixe 1.
3. En utilisant le fait que a préserve les distances, conclure.

6F1 Exercice 4 ★ Soit p un nombre premier, et $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{U}_{p^n}$.

1. Montrer que G est sous-groupe de (\mathbb{C}^*, \times) .
2. Soit H un sous-groupe propre de G , c'est-à-dire un sous-groupe différent de G .
 - a) En considérant $z_0 \in G \setminus H$, montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $H \subset \mathbb{U}_{p^{n_0}}$.
 - b) Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $H = \mathbb{U}_{p^n}$.

H24 Exercice 5 ★ Soit G un groupe fini non réduit à $\{1\}$ tel que $\forall a \in G, a^2 = 1$.

1. Montrer que G est commutatif.
2. Montrer que G est de cardinal pair.
3. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que G soit isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^p$.

Ind : Considérer une famille génératrice de cardinal minimal.

Ind : Considérer $a \neq 1$, et $\varphi: g \mapsto ag$.

Calcul dans le groupe symétrique

MVE Exercice 6 ✎ 🏠

1. Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 7 & 6 & 8 & 4 & 9 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
 - a) Décomposer σ en produit de cycles disjoints.
 - b) Déterminer l'ordre de σ , c'est-à-dire le plus petit entier $p \geq 1$ tel que $\sigma^p = \text{Id}$.
2. Écrire les cycles $(1\ 2\ 3)$ et $(1\ 2\ 3\ 4)$ comme produits de 2 et 3 transpositions, respectivement.

WVE Exercice 7 Expliciter sans justifier une permutation σ d'ordre 30 dans \mathcal{S}_{10} .

166 Exercice 8 Soit $n \geq 2$ et, dans le groupe \mathcal{S}_n , on considère l'application qui à σ associe $\sigma c \sigma^{-1}$, où c désigne le cycle $(1\ 2 \dots n)$. Déterminer l'image de cette application.

JLP Exercice 9 ✎ Soit $c = (1\ 2\ 3 \dots n) \in \mathcal{S}_n$.

1. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ qui commute avec c et dont 1 est un point fixe. Montrer que $\sigma = \text{Id}$.
2. Quelles sont les permutations de \mathcal{S}_n qui commutent avec c ?

7ZL Exercice 10 ★ [ORAL X] À quelle condition une permutation de $\{1, \dots, n\}$ est-elle un carré?

Dénombrement

W24 Exercice 11

1. Quel est le nombre de n -cycles dans \mathcal{S}_n ?
2. Pour $k \geq 2$, quel est le nombre de k -cycles de \mathcal{S}_n ?

GP0 Exercice 12 ✎ Soit p premier, quel est le nombre d'éléments de \mathcal{S}_{2p} d'ordre p ?

DFE Exercice 13 ★ [MINES 2023] On munit \mathcal{S}_n de la probabilité uniforme. Calculer la probabilité π_n que $\sigma \in \mathcal{S}_n$ ait un cycle de longueur strictement supérieure à $\frac{n}{2}$ dans sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints. Déterminer un équivalent de π_n .

0B8 Exercice 14 ★ Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Dénombrer $\mathcal{C}(\sigma) = \{\tau \in \mathcal{S}_n \mid \sigma\tau = \tau\sigma\}$.

Signature

AC8 Exercice 15 ✎ On note \mathcal{A}_n l'ensemble des permutations de signature 1. Montrer que pour $n \geq 2$, on a $|\mathcal{A}_n| = \frac{1}{2}|\mathcal{S}_n|$.

Indication : Établir une bijection, entre deux ensembles.

R24 Exercice 16 Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On pose $f(\sigma) = \prod_{i < j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$, et, pour $\tau \in \mathcal{S}_n$, $f_\tau(\sigma) = \prod_{i < j} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{\tau(j) - \tau(i)}$.

1. Justifier que $f(\sigma)^2 = \prod_{i \neq j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$, puis que $|f(\sigma)| = 1$.
2. Justifier que $f(\sigma) = (-1)^m$, où m est le nombre de parties $\{i, j\}$ telles que $\sigma(j) - \sigma(i)$ et $j - i$ soient de signes opposés.
3. Soit $\tau \in \mathcal{S}_n$. Montrer que $f(\sigma) = f_\tau(\sigma)$. En déduire que $f(\sigma \circ \tau) = f(\sigma)f(\tau)$.
4. Montrer que si $\tau = (1\ 2)$, alors $f(\tau) = -1$.
5. Justifier que toutes les transpositions sont conjuguées à $(1\ 2)$, c'est-à-dire que pour toute transposition $(i\ j)$, il existe $\sigma \in \mathcal{S}_n$ tel que $(i\ j) = \sigma\tau\sigma^{-1}$.
6. En déduire l'image par f de toute transposition, puis que $f = \varepsilon$.

3LB Exercice 17 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application $\sigma: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ définie par $\sigma(x) = x + \bar{2}$.

1. Montrer que σ est bijective.
2. Déterminer les orbites, et la signature de σ . On distinguera deux cas sur n .

Propriétés du groupe \mathcal{S}_n

JZR Exercice 18 On note \mathcal{Z}_n le centre de \mathcal{S}_n .

1. Déterminer \mathcal{Z}_1 et \mathcal{Z}_2 .
2. Soit $n \geq 3$.
 - a) Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, montrer qu'il existe une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ dont le seul point fixe est i .
 - b) En déduire que $\mathcal{Z}_n = \{\text{Id}\}$.

ES1 Exercice 19 Soit e_1, \dots, e_n la base canonique de \mathbb{R}^n . Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, soit u_σ l'unique application linéaire vérifiant $\forall i, u_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$.

1. Expliciter la matrice M_σ canoniquement associée à u_σ , c'est-à-dire vérifiant $\forall i, M_\sigma e_i = e_{\sigma(i)}$.
2. Montrer que $\sigma \mapsto M_\sigma$ est un morphisme de groupe de (\mathcal{S}_n, \circ) dans $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$.
3. On considère $\vec{a} = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ et $H = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$. Montrer que $\text{Vect } \vec{a}$ et H sont stables par u_σ .
4. ★ Montrer que les seuls sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n stables par tous les u_σ sont $\{\vec{0}\}$, $\text{Vect } \vec{a}$, H et \mathbb{R}^n .

Indication : Si F est stable par tous les u_σ et contient $x \notin \text{Vect } \vec{a}$, montrer que F contient un vecteur de la forme $e_i - e_j$.

C9U Exercice 20

1. Montrer que \mathcal{S}_n est engendré par les transpositions de la forme $(1 k)$.
2. Montrer que \mathcal{S}_n est engendré par les transpositions de la forme $(i i + 1)$.
3. Montrer que \mathcal{S}_n est engendré par $(1 2)$ et le cycle $(1 2 \dots n)$.

5IY Exercice 21 Montrer que pour $n \geq 3$, \mathcal{A}_n est engendré par les cycles de longueurs 3.

Compléments sur les groupes

DMB Exercice 22 Soit G un groupe.

1. Pour $g \in G$, on note $\varphi_g: h \mapsto ghg^{-1}$. Vérifier que φ_g est un automorphisme de G .
2. Montrer que l'application $\Phi: g \mapsto \varphi_g$ est un morphisme, de G dans $(\text{Aut}(G), \circ)$, le groupe des automorphismes de G . On note $\text{Int}(G) = \text{Im } \Phi$, qui forme un sous-groupe de $\text{Aut}(G)$.
3. Montrer que pour $n \geq 3$, $\text{Int}(\mathcal{S}_n) \simeq \mathcal{S}_n$, c'est-à-dire que les deux groupes sont isomorphes.
On peut par ailleurs montrer que pour $n \neq 6$, $\text{Int}(\mathcal{S}_n) = \text{Aut}(\mathcal{S}_n)$.

K5A Exercice 23 Soit (G, \times) un groupe commutatif fini, et $x \in G$.

1. Montrer que $\varphi_x: g \mapsto xg$ est bijective.
2. En considérant $p = \prod_{g \in G} g$, montrer que l'ordre de x divise $|G|$.
Ce résultat reste vrai pour un groupe non abélien.

THA Exercice 24 ★ Soit p premier impair et G un groupe de cardinal $2p$.

1. Montrer que G contient un élément d'ordre 2. $x^2 = e \Leftrightarrow x = x^{-1}$.
2. On suppose que $\forall g \in G, g^2 = e$.
 - a) Soit $g_0 \in G \setminus \{e\}$. Montrer que $g \mapsto g_0g$ est une permutation de G de signature impaire.
 - b) Aboutir à une contradiction
3. Montrer que G contient un élément d'ordre p . Admettre que l'ordre de tout élément divise $2p$

41M Exercice 25 ★ LEMME DE CAUCHY Soit $\varphi: G \rightarrow G'$ un morphisme de groupe. On suppose G fini.

1. Normalité du noyau, et théorème du rang.
 - a) Montrer que pour tout $g \in G$, on a $g(\text{Ker } \varphi)g^{-1} = \text{Ker } \varphi$. On dit que $\text{Ker } \varphi$ est un sous-groupe normal.
 - b) Montrer que $|\text{Ker } \varphi| \times |\text{Im } \varphi| = |G|$.

2. Soit p premier divisant $|G|$ et $\theta: G^p \rightarrow G^p$ $(x_0, \dots, x_{p-1}) \mapsto (x_{p-1}, x_0, \dots, x_{p-2})$. On note

$$A = \{(x_0, \dots, x_{p-1}) \in G^p \mid x_0x_1 \dots x_{p-1} = e\}.$$

Quels sont les points fixes de θ ? Montrer que $\theta(A) \subset A$. Exprimer $|A|$ en fonction de $|G|$ et p .

3. Pour $X \in G^p$, on pose $\widehat{X} = \{X, \theta(X), \dots, \theta^{p-1}(X)\}$. Soit $q = \left| \left\{ X \in A \mid \text{Card } \widehat{X} = 1 \right\} \right|$. Montrer que p divise $|A| - q$. En déduire que G admet un élément d'ordre p .

Algèbres

AV0 Exercice 26 ★ [ORAL CENTRALE] Soit \mathbb{K} une \mathbb{R} -algèbre unitaire commutative intègre de dimension finie $n \geq 1$.

1. Soit $a \in \mathbb{K}$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul tel que $P(a) = 0$.
2. On identifie \mathbb{R} à $\mathbb{R} \cdot 1$, où 1 est l'unité de \mathbb{K} . Montrer que si $a \notin \mathbb{R}$, on peut trouver $i \in \mathbb{K}$ tel que $i^2 = -1$.
3. En déduire que $\mathbb{K} \simeq \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} \simeq \mathbb{C}$.

0IY Exercice 27 ★ Montrer que les algèbres $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ne sont pas isomorphes.